MOMENTO; PAR DE FUERZAS O CUPLA; FUERZAS DISTRIBUIDAS; CENTRO DE GRAVEDAD; RESULTANTE DE UN SISTEMA GENERAL DE FUERZAS.

INTRODUCCIÓN:

Este capítulo completa los contenidos de la Unidad 7 (Estática y concepto de equilibrio).

Los conceptos de: Fuerza (como vector), Resultante o composición de fuerzas concurrentes, Torque de una fuerza y Torque de varias fuerzas concurrentes se han visto en estática y concepto de equilibrio (parte I), para una partícula.

Antes de abordar las secciones, que se desarrollan en este capítulo, se deberán repasar los conceptos indicados.

Los conceptos mencionados, más los que a continuación se desarrollan, son necesarios de adquirir para abordar el equilibrio de un cuerpo rígido.

VECTOR: FIJO; DESLIZANTE Y LIBRE:

También necesitamos conocer otras propiedades de los vectores, además de las vistas para la estática y equilibrio de la partícula, estas propiedades, son;

Vector Fijo:

Es el vector cuyo punto de aplicación está bien definido y fijo; lo utilizamos para representar la fuerza que actúa sobre una partícula. El punto de aplicación fijo, es la partícula misma.

Se dice que un vector de este tipo es un vector fijo, adherido o ligado y no puede ser movido sin modificar las condiciones del problema.

Vector Deslizante:

Es el vector que puede moverse o resbalar a lo largo de su línea de acción, como el utilizado para las fuerzas sobre un cuerpo rígido.

Vector Libre:

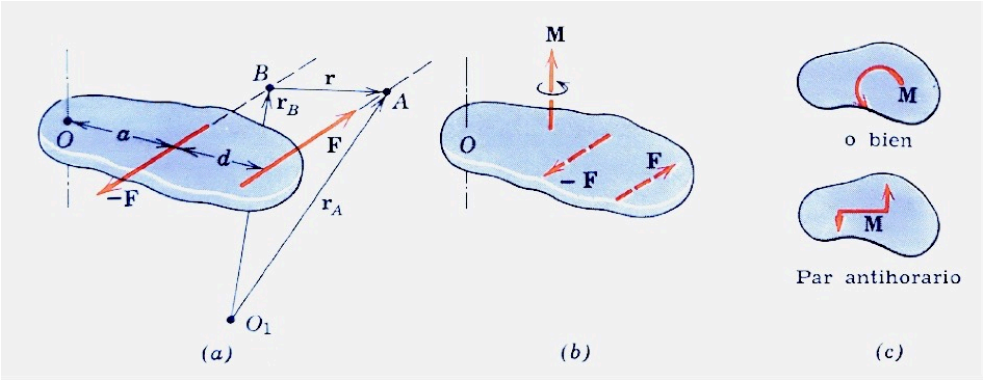
Es el vector que *puede moverse libremente en el espacio* y describe a otras cantidades físicas, como los pares o cuplas, (mas adelante demostraremos esta propiedad).

PAR DE FUERZAS O CUPLA:

El par de fuerzas o cupla es el momento producido por dos fuerzas de igual módulo y dirección, pero de sentidos opuestos, cuyas líneas de acción no coinciden.

Un par de fuerzas o cupla, presenta ciertas propiedades únicas y tiene importantes aplicaciones en Mecánica.

Consideremos la acción de dos fuerzas, $\bar{F}$ y -$\bar{F}$ separadas una distancia *d* (*figura a*).



$\bar{F}$ + (-$\bar{F}$) $= 0$ su efecto es solamente el de producir una tendencia a la rotación;

El momento combinado de las dos fuerzas respecto a un eje normal a su plano que pase por un punto cualquiera tal como el O es.

$$M = F\,(a + d) - F\,a;$$

o sea

$$M = F\,d\,;$$

valor del par de momento de las fuerzas F

PROPIEDADES DE UN PAR DE FUERZAS O CUPLA:

Un par es *independiente de la distancia a,* que sitúa a las fuerzas respecto al centro *O* del momento, (ver *figura a*)

Un par es el *mismo para todos los centros de momentos*.

El momento de un par podrá representarse por un *vector libre* ($\bar{M}$), como se indica en la *figura b*,

La dirección es *perpendicular al plano del par* y el sentido del vector queda establecido por la regla de la mano derecha.

En el caso de pares debidos a fuerzas que actúen todas en el mismo plano o en planos paralelos, los vectores par serán *perpendiculares al plano*.

(En tal caso será más conveniente representar dicho par por uno cualquiera de los convenios representados en la *figura c*, en donde el par anti horario puede tomarse como positivo y el horario como negativo, o al revés).

UN PAR O CUPLA ES UN VECTOR LIBRE:

Demostración:

Tomaremos un caso que represente de manera general, combinando los momentos de las dos fuerzas respecto a un punto de referencia cualquiera O_1 (*figura a*).

Los puntos *A* y *B*, de vectores de posición respectivos, $\bar{r}_A \; y \; \bar{r}_B$, son dos puntos cualesquiera de las correspondientes rectas soporte de $\bar{F}$ y -$\bar{F}$;

con esta notación, el momento resultante de las dos fuerzas respecto a O_1 es;

$$\bar{M} = \bar{r}_A \; x \; \bar{F} + \bar{r}_B \; x \; (-\bar{F})$$
$$= (\bar{r}_A - \bar{r}_B) \; x \; \bar{F}$$
$$= \bar{r} \; x \; \bar{F}$$

Como *d* es la proyección de $\bar{r}$ sobre la normal a $\bar{F}$, se observa que la magnitud de esta expresión es *M = F d*, que es el módulo del par.

Se observa también que la dirección de $\bar{M}$ es normal al plano de $\bar{r} \; y \; \bar{F}$ como se describió anteriormente.

Como $\bar{r} \; x \; \bar{F}$ no contiene referencia alguna al punto O_1, se deduce que $\bar{M}$ será el mismo para todos los puntos de referencia y, por tanto, puede tratarse como vector libre.

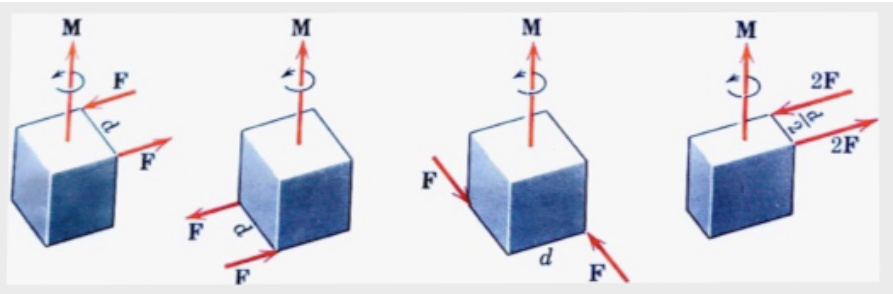
Además, el par permanece invariable mientras la magnitud, dirección y sentido de su vector se mantengan constantes.

En consecuencia, un par dado no se alterará al variar los valores de *F* y *d* mientras se mantenga constante su producto.

Análogamente, el par no se verá afectado si las fuerzas pasan a actuar en otro plano paralelo cualquiera. Por lo expuesto queda demostrado que el par es un vector libre.

En las figuras (*d*, *e*, *f* y *g*) puede verse cuatro configuraciones diferentes del mismo par $\bar{M}$.

En cada uno de estos cuatro casos el par viene descrito por el vector libre idéntico que representa las tendencias idénticas a torcer los cuerpos en la dirección y sentido que se indican.

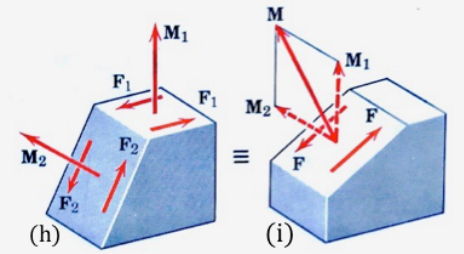


(d) (e) (f) (g)

PARES DE FUERZAS O CUPLAS EN PLANOS NO PARALELOS:

Los pares que se ejerzan en planos no paralelos se pueden sumar mediante las reglas generales de la adición vectorial.

Así, en la *figura h,* el par $\bar{M}_1$ debido a fuerzas $\bar{F}_1$: y el par, $\bar{M}_2$ debido a fuerzas $\bar{F}_2$, que se ejercen en los planos distintos que se indican, se podrán sustituir por su suma vectorial M representada en la *figura i*.

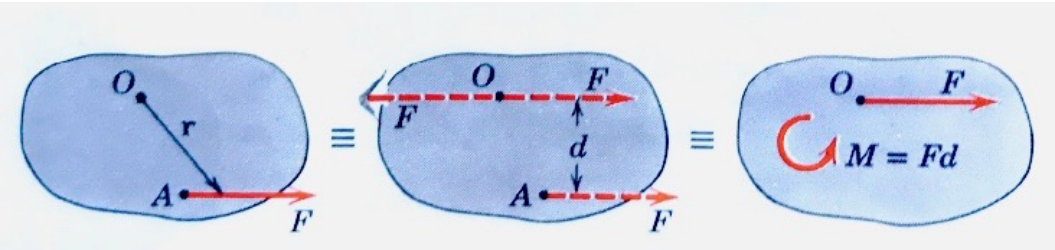


DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN UNA FUERZA Y UN PAR:

El efecto de una fuerza que se ejerza sobre un cuerpo lo hemos descrito con arreglo a la tendencia a empujar el cuerpo, o tirar de él, en la dirección de la fuerza y a la tendencia a hacer girar el cuerpo alrededor de un eje cualquiera que no corte a la recta soporte de la fuerza.

La representación de este efecto doble se suele facilitar sustituyendo la fuerza dada por otra igual y paralela mas un par que compense el cambio del momento de la fuerza.

En la *figura j* se ilustra esta descomposición de una fuerza en una fuerza y un par sustituyendo la fuerza $\bar{F}$ aplicada en el punto A por la misma fuerza trasladada a un punto O, más un par anti horario *M = F d.*



(j)

La *figura central j*, muestra el paso del sistema inicial al final, consistente en añadir en el punto o dos fuerzas opuestas, $\bar{F}\ y\ -\bar{F}$,que no introducen efectos externos sobre el cuerpo.

Vemos ahora que la fuerza inicial en A y la igual y opuesta en O constituyen el par, M = F d, que en el ejemplo tratado es anti horario, según se indica en la parte derecha de la *figura j*.

Así, la fuerza original que estaba en A se ha sustituido por la misma fuerza que se ejerce en un punto distinto O y un par, sin alterar los efectos exteriores sobre el cuerpo de la fuerza original.

FUERZAS DISTRIBUIDAS

En los capítulos anteriores se ha supuesto que todas las fuerzas estaban concentradas y se han representado mediante simples vectores con punto de aplicación determinado o situados sobre las líneas de acción de las fuerzas.

En realidad, *no existen fuerzas "concentradas", ya que toda fuerza real aplicada a un cuerpo se distribuye sobre un área o volumen finitos*.

Cuando una fuerza está distribuida sobre una región, a la distribución se le llama campo de fuerzas.

El campo puede estar representado por la distribución de la fuerza a lo largo de una línea, sobre una superficie, o en todo un volumen.

Fuerzas distribuidas en una superficie:

La fuerza distribuida sobre una superficie recibe el nombre de *presión o esfuerzo* y se mide como fuerza por unidad de superficie sobre la cual actúa.

Una fuerza distribuida viene medida en cada punto por su intensidad.

La *presión* suele emplearse para designar la intensidad de *fuerza distribuida debida a la acción de fluidos*, mientras que la palabra esfuerzo se emplea más generalmente para designar la *fuerza distribuida interiormente en los sólidos*.

Es evidente que, cuando las dimensiones del área sobre la que se distribuye la fuerza son despreciables frente a las demás dimensiones del cuerpo, el concepto de fuerza concentrada no introduce ninguna complicación.

Por otra parte, la fuerza puede estar aplicada sobre una superficie de extensión considerable y deberá tenerse en cuenta la variación de la distribución de la fuerza sobre la superficie.

Fuerzas distribuidas en un volumen:

Son fuerzas que se distribuyen sobre el *volumen de un cuerpo o un fluido*, se las suele denominar como *fuerzas másicas o fuerzas por unidad de volumen.*

Las fuerzas del *campo gravitatorio*, o de los *campos eléctrico y magnético* son ejemplos de estas fuerzas.

Se utilizan en diversos estudios, como por ejemplo, en la mecánica de: sistemas de partículas, cuerpos sólidos rígidos o no rígidos y en los fluidos.

Cuando la fuerza másica se debe a la atracción de la gravedad, la intensidad se escribe $\gamma\, g$, donde γ (gama) representa el peso específico (peso por unidad de volumen) y g la aceleración de la gravedad. La unidad de $\gamma\, g$ es ; $(kg/\, m^3)$ (m/s^2) = $(N/m3)$.

CENTRO DE GRAVEDAD:

La fuerza distribuida más conocida es la *fuerza de atracción de la Tierra*.

Esta fuerza másica se distribuye por todas las partes de todos los objetos situados en el campo de influencia de la Tierra.

La resultante de esta distribución de fuerza másica la denominamos *peso del cuerpo*, y es necesario determinar su posición.

Experimento: Ubicación del centro de gravedad:

Consideremos un cuerpo tridimensional de tamaño, forma y peso cualesquiera.

Sí se le suspende, como se indica en la *figura a*, de un punto cualquiera tal como el A mediante una cuerda, el cuerpo se hallará en equilibrio bajo la acción de la tensión de la cuerda y la resultante de las fuerzas másicas o de gravedad que actúan sobre sus partículas. Es evidente que esta resultante tendrá por línea de acción la recta definida por la cuerda, y se supondrá que puede señalarse su posición, por ejemplo, practicando en el cuerpo un hueco de tamaño despreciable a lo largo de su línea de acción. Se repite este experimento suspendiendo el cuerpo por otros puntos tales como el B y el C, y en todos los casos se marca la línea de acción de la resultante. Para todos los fines prácticos estas líneas de acción concurrirán en un punto al que se da el nombre de *centro de gravedad* o centro de masa del cuerpo.

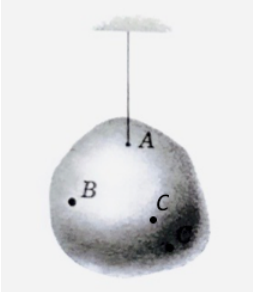


figura a

Consideraciones:

Un análisis preciso tendría en cuenta el hecho de que las direcciones de las fuerzas de gravedad correspondientes a las distintas partículas que constituyen el cuerpo son ligeramente diferentes a causa del hecho de que convergen hacia el centro de la Tierra.

Incluso, en rigor, como las partículas se hallan a diferentes distancias de la Tierra, la intensidad del campo de fuerzas de la Tierra no se mantiene exactamente constante sobre todo el cuerpo.

Estas consideraciones llevan a la conclusión de que las líneas de acción de las resultantes de las fuerzas de gravedad, en los experimentos antes mencionados, *no serán exactamente concurrentes y por tanto no existirá, en el sentido exacto, un centro de gravedad*.

Esta condición carece de importancia práctica mientras tratemos con cuerpos cuyas dimensiones sean pequeñas frente a las de la Tierra.

Por tanto, supondremos un campo uniforme de fuerzas (paralelas) debido a la atracción gravitatoria terrestre y esta condición da como resultado el concepto de un centro de gravedad único.

Para determinar matemáticamente la posición del centro de gravedad G de un cuerpo cualquiera, *figura b*, deberá escribirse una ecuación que establezca, por el teorema de Varignon, que el momento respecto a un eje de la resultante *P* de las fuerzas de gravedad es igual a la suma de los momentos respecto al mismo eje de las fuerzas de gravedad *dP* que se ejercen sobre todas las partículas consideradas como elementos infinitesimales del cuerpo.

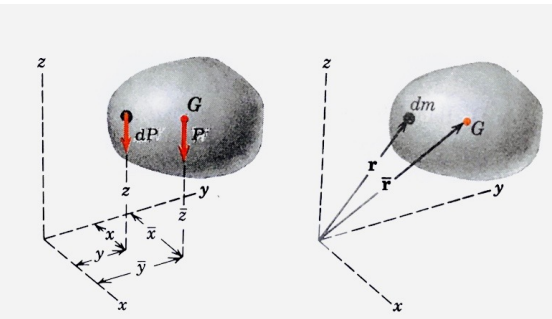


figura b

La resultante de las fuerzas de gravedad que se ejercen sobre todos los elementos es el peso del cuerpo y viene dado por la suma

$P = \int dP$.

Si se aplica el principio de los momentos respecto al eje *y*, por ejemplo, el momento respecto a este eje del peso elemental será,

$$x\,dP$$

y la suma de dichos momentos para todos los elementos del cuerpo es,

$$\int x\,dP$$

Esta suma de momentos debe ser igual al momento;

$$P\,x_G.$$

Así pues, las expresiones de los momentos respecto a los tres ejes dará,

$$x_G = \frac{\int x\,dP}{P};\ y_G = \frac{\int y\,dP}{P}\ ;\quad z_G = \frac{\int z\,dP}{P}\ *$$

El numerador de cada expresión representa la suma de momentos y el producto de *P* por la coordenada correspondiente de *G* representa el momento de la suma.

La tercera ecuación se obtiene girando el cuerpo y el sistema de referencia 90º alrededor de un eje horizontal de manera que el eje z quede horizontal.

Las ecuaciones pueden expresarse en forma vectorial con ayuda de la *figura b*, en donde la masa elemental y el centro de gravedad *G* están localizados por sus vectores de posición respectivos

$$\bar{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}\quad \text{y}$$

$$\bar{r}_G = x_G\,\hat{\imath} + y_G\,\hat{\jmath} + z_G\,\hat{k}$$

Así, las ecuaciones son las componentes de la ecuación vectorial única;

$$\bar{r}_G = \frac{\int \bar{r}\,dP}{P} \qquad o \qquad \bar{r}_G = \frac{\int \bar{r}\,dm}{m}$$

donde, en la segunda ecuación, la masa ha sustituido al peso en virtud de la relación *P = mg*.

Esta segunda ecuación define la posición del *centro de masa*, *que coincide, evidentemente, con el centro de* gravedad *mientras el campo de la gravedad pueda considerarse uniforme y paralelo.*

Carece de sentido hablar de centro de gravedad de un cuerpo que se saque del campo gravitatorio terrestre, o del de cualquier otro campo gravitatorio, (por ejemplo el de la luna), ya que sobre dicho cuerpo no se ejercerían fuerzas de gravedad.
En cambio, seguiría teniendo su centro de masa único.

Es totalmente adecuado utilizar el término centro de gravedad siempre que se haga referencia al efecto de las fuerzas de la gravedad sobre un cuerpo.
En cambio, el término centro de masa se utiliza más adecuadamente cuando se hace referencia a la influencia de la distribución de la masa sobre la respuesta dinámica de un cuerpo a fuerzas no equilibradas, tal como desarrollamos en Dinámica.
En la mayoría de los problemas se podrán simplificar los cálculos del centro de gravedad y el centro de masa, mediante una elección apropiada de los ejes de referencia.
En general, los ejes se deberán colocar de manera que simplifiquen todo lo posible las ecuaciones de los contornos.
Así, las coordenadas polares simplificarán, en general, aquellos problemas que tengan contornos circulares.
Otro indicio importante surgirá de las cuestiones de simetría.
Siempre que exista un eje o un plano de simetría, con él debería hacerse coincidir un eje o plano coordenado.
El centro de gravedad se hallará siempre sobre dicho eje o plano, ya que los momentos debidos a elementos situados simétricamente se compensarán y el cuerpo podrá considerarse constituido por pares de elementos de este tipo.
Por ejemplo si el eje de un cono recto de revolución es un tal eje de simetría y el plano central vertical en la dirección de popa a proa del casco de un buque es un tal plano de simetría.

Cuando se aborden cálculos por el método de la integral, es importante la *elección adecuada del elemento diferencial* para el proceso de integración. *Deberán manejarse el cálculo diferencial e integral* y siempre que sea posible se debería tomar un *elemento diferencial de primer orden* de manera que pueda cubrirse toda la figura con *una sola integración*.
Independientemente del elemento empleado, la coordenada x, y o z que multiplica a dP en el numerador de las ecuaciones (*), es la coordenada del centro de gravedad del elemento.

Cuando no convenga un elemento de primer orden, se tornará una cantidad de segundo orden preferentemente a una de tercero.

RESULTANTE DE UN SISTEMA GENERAL DE FUERZAS:

Con los conceptos enunciados de Fuerza, Momento y Par, describiremos a continuación la acción resultante de un grupo o sistema general de fuerzas.

La mayoría de los problemas de la Mecánica tratan de sistemas de fuerzas y será necesario reducir el sistema de fuerzas a su forma más sencilla para describir su acción.

Así, pues, la determinación de la resultante de un sistema general de fuerzas es fundamental tanto para la Estática como para la Dinámica.

La resultante de un sistema de fuerzas es la combinación de fuerzas más sencilla que pueda sustituir a las fuerzas originales sin alterar el efecto exterior del sistema de fuerzas sobre el cuerpo.

Cuando las fuerzas se aplican sobre un cuerpo, en general se aplican en diversos puntos, (*figura a*), generando los efectos de tendencia del cuerpo a la traslación y rotación.

El punto de aplicación de la resultante queda por determinarse.

Un sistema de fuerzas concurrentes puede reemplazarse *siempre por una sola fuerza* que denominamos resultante, (como se vió en estática, parte I).

En el sistema de fuerzas no concurrentes esto no es así.

En estos sistemas de fuerza, en general, en muchos casos el torque de la resultante no es un vector perpendicular a ella. Por ejemplo, en el caso de un par, la resultante es cero y el torque respecto de cualquier punto es distinto de cero. Obviamente es *imposible* que una sola fuerza satisfaga estas condiciones.

Por lo tanto, en general, un sistema de fuerzas no concurrente, no puede reducirse a una sola fuerza resultante igual a la suma de las fuerzas.

En cambio:

Un sistema general de fuerzas siempre puede reducirse a una fuerza y un par.

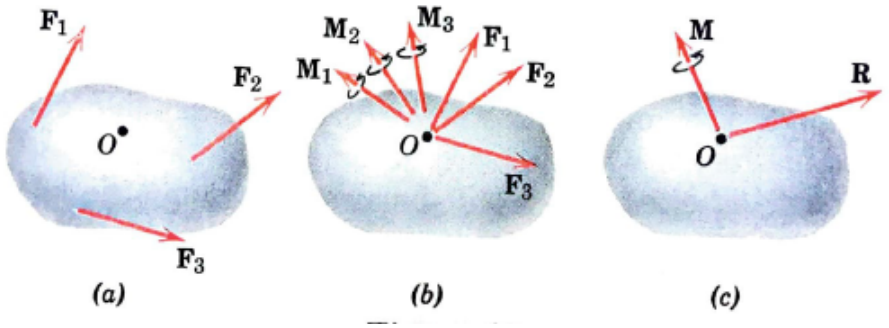
Esto lo demostramos anteriormente, al descomponer una fuerza, obteniendo que una fuerza (F) puede sustituirse por la misma fuerza desplazada a una posición paralela que pase por un punto arbitrario *O* y a un par de momento *F d*, donde *d* es el brazo de momento desde *O* hasta la posición original de *F*.

$$\bar{M} = \bar{r}\, x\, \bar{F}$$

donde $\bar{r}$ es un vector que va de *O* a un punto cualquiera de la recta soporte de la fuerza $\bar{F}$.

En el caso de un sistema de fuerzas $\bar{F}_1$; $\bar{F}_2$; $\bar{F}_3$ *…, totalmente general en el espacio, se deduce que cada una de ellas puede trasladarse paralelamente a sí misma a un mismo punto O con tal de añadir un par por cada una de las fuerzas así trasladadas*.

Así, pues, para el sistema esquematizado en la *figura a*, las fuerzas pueden considerarse todas aplicadas al punto arbitrario *O*, con la adición de los pares correspondientes (*figura b*). *Las fuerzas concurrentes, entonces pueden sumarse vectorialmente, dando una fuerza resultante* $\bar{R}$ *y también pueden sumarse los pares dando un par resultante de momento* $\bar{M}$ (*figura c*).



El sistema general de fuerzas se reduce entonces a:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \cdots = \sum \bar{F}$$

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \cdots = \sum \bar{M}$$

Los vectores momento se han representado todos en O, pero como son vectores libres, *podrán representarse paralelamente en cualquier otra posición*.

Las magnitudes de las resultantes y de sus componentes son;

$$R_x = \sum F_x\,; \quad R_y = \sum F_y\,; \quad R_z = \sum F_z$$

$$R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_x\right)^2}$$

$$M_x = \sum (\bar{r}\ x\ \bar{F})_x\ ;\quad M_y = \sum (\bar{r}\ x\ \bar{F})_y\ ;\quad M_z = \sum (\bar{r}\ x\ \bar{F})_z$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

El punto *O* seleccionado como punto de concurso de las fuerzas *es arbitrario*. y la magnitud, dirección y sentido de $\bar{M}$ dependerán de cuál sea el punto *O* seleccionado.

En cambio, la magnitud, dirección y sentido de $\bar{R}$ son siempre las mismas *independientemente de cuál sea el punto elegido*.

En dinámica, el punto que suele tomarse como referencia en dinámica es el centro de masa.

La fuerza resultante es la variación de cantidad de movimiento en la unidad de tiempo, y

El momento resultante la variación del momento angula, respecto al centro de masa, en la unidad de tiempo.

Por último, establecidas las resultantes para sistemas de fuerzas cualesquiera, podemos aplicar lo visto a la determinación de resultantes de fuerza para distintos sistemas particulares de fuerzas.

A. CONCEPTO DE EQUILIBRIO DE UN CUERPO:

El término equilibrio implica que el cuerpo está en reposo o con su centro de masa con velocidad constante de traslación y sin rotación o rota con velocidad angular constante en relación con un observador en un marco de referencia inercial, estos conceptos son tratados en la dinámica del cuerpo rígido.

Aquí sólo se tratará con el primer caso, en el que el cuerpo está en *equilibrio estático*, esto es: velocidad del centro de masa nula y velocidad angular nula.

En este capítulo trataremos la descripción de las condiciones de fuerza que sean a un tiempo necesarias y suficientes para mantener el estado de equilibrio estático de cuerpos rígidos.

Cuerpo Rígido: Es un sistema de partículas especial, en el que Idealmente no tiene deformación relativa ninguna de sus partes.

Cuerpo Deformable: Todos los cuerpos en realidad son deformables en mayor o menor medida; físicamente se tratará estos cuerpos cuando haya que considerar los efectos de las fuerzas exteriores sobre las deformaciones y esfuerzos internos.

No se estudiará, en estas secciones, los cuerpos deformables.

B. CONDICIONES DE EQUILIBRIO:

En el estudio de partículas, se demostró que una partícula está en equilibrio (es decir, no tiene aceleración), en un marco de referencia inercial si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero.

PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO O EQUILIBRIO DE TRASLACIÓN:

La expresión equivalente para un cuerpo es que *el centro de masa del cuerpo tiene aceleración cero* cuando la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo es cero, la sumatoria incluye sólo fuerzas aplicadas sobre el cuerpo. Esto se demostrará en el estudio de la dinámica del cuerpo rígido.

SEGUNDA CONDICION DE EQUILIBRIO O EQUILIBRIO ROTACIONAL:

Una segunda condición para que un cuerpo esté en equilibrio es que *no debe tener tendencia a girar*, esto es así ya que la suma de torques aplicados al cuerpo, alrededor de cualquier punto debe ser cero.

Esta condición se demuestra en la dinámica del movimiento rotacional de un cuerpo.

(Se demuestra que para cuerpo rígido que, en un marco de referencia inercial, no está girando alrededor de un punto tiene un momento angular cero respecto de ese punto. Para que el cuerpo no comience a girar en torno a ese punto, la rapidez de cambio del momento angular también debe ser cero).

C. ECUACIONES:

El sistema de fuerzas mas general que pueda ejercerse sobre un cuerpo puede expresarse mediante una fuerza resultante $\bar{R}$ y un par resultante $\bar{M}$. Donde el par es respecto de un punto cualquiera, (*ver resultante de un sistema general de fuerzas*).

Luego, para que se contrarresten por completo las fuerzas y momentos y el cuerpo esté en equilibrio;

$$\bar{R} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{M} = 0$$

como cada uno de los términos de estas dos ecuaciones representa respectivamente una suma vectorial de todas las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo y una suma de todos los momentos correspondientes, se deduce que la expresión matemática de las condiciones para el equilibrio son:

$$\sum \bar{F} = 0 \; ; \quad \sum \bar{M} = 0$$

expresión matemática del equilibrio de traslación y del equilibrio rotacional (respectivamente)

Si se descompone cada fuerza y cada momento en sus componentes cartesianas, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido por medio de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\sum \bar{F}_x = 0 \; ; \quad \sum \bar{F}_y = 0 \; ; \quad \sum \bar{F}_z = 0$$

$$\sum \bar{M}_x = 0 \; ; \quad \sum \bar{M}_y = 0 \; ; \quad \sum \bar{M}_z = 0$$

expresiones matemáticas de las condiciones para el equilibrio en componentes cartesianas

Las ecuaciones obtenidas se pueden emplear para *determinar fuerzas desconocidas* que están aplicadas sobre el cuerpo rígido o *reacciones desconocidas* ejercidas sobre éste por sus puntos de apoyo.

Se observa que las ecuaciones de fuerza y momento expresan el hecho de que las componentes de ambas en las direcciones *x*, *y* y *z* están *balanceadas*.

Por tanto, para un cuerpo rígido en equilibrio estático, el sistema de fuerzas *no le impartirá un movimiento traslacional o rotacional* al cuerpo en consideración.

Para poder escribir las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido, es esencial identificar primero todas las *fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo* y, luego, dibujar el *diagrama de cuerpo libre* correspondiente.

D. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:

Al resolver un problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es esencial que se consideren *todas las fuerzas que actúan sobre éste*; además, es importante excluir cualquier fuerza que no esté dada directamente sobre dicho cuerpo.

Por lo tanto, el primer paso en la solución del problema es esquematizar un diagrama de cuerpo libre del cuerpo rígido en consideración.

En vista de su importancia para la solución de problemas de equilibrio, aquí se resumen los diferentes pasos que se deben seguir al momento de dibujar un diagrama de cuerpo libre.

1. Se debe tomar una decisión acertada en relación con la selección del cuerpo libre que será utilizado. Después se debe *separar al cuerpo de todos los demás cuerpos* con los que se vincula.
Así, se obtendrá un croquis del contorno del cuerpo ya aislado.

2. Se deberán indicar en el diagrama, *todas las fuerzas* aplicadas al cuerpo.
Estas fuerzas representan las acciones ejercidas sobre el cuerpo libre por los cuerpos que han sido separados del mismo; estas fuerzas *deben aplicarse en los diversos puntos* sobre los que el cuerpo libre estaba apoyado o conectado a otros cuerpos.
También se debe incluir entre las fuerzas *el peso del cuerpo*, puesto que representa la atracción ejercida por la Tierra sobre las distintas partículas que lo constituyen.
El peso debe aplicarse en el *centro de gravedad* del cuerpo.
Cuando el cuerpo libre está constituido por varias partes, se puede considerar a los cuerpos como un conjunto, y las fuerzas que dichas partes ejercen entre sí no deben incluirse entre las fuerzas externas al conjunto.

3. Las magnitudes y las direcciones de las fuerzas que son conocidas deben señalarse con claridad. Cuando se indiquen los sentidos de dichas fuerzas, se debe recordar que éstas son las *ejercidas sobre el cuerpo*, y no, por el cuerpo.

4. Las fuerzas desconocidas consisten en las *reacciones* a través de las cuales otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo. Las reacciones lo obligan a permanecer en la misma posición, y por esta razón, algunas veces reciben el nombre de fuerzas de restricción. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo está apoyado o conectado a otros cuerpos y deben indicarse con claridad.

5. El diagrama de cuerpo libre también debe *incluir dimensiones*, puesto que éstas se pueden necesitar para el cálculo de momentos de fuerzas.
Se sugiere omitir, detalles, que no sean innecesarios.

E. EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES:

Cuando el cálculo se desarrolla en dos dimensiones, y se selecciona a los ejes *x*-*y*, se tiene que, $\bar{F}_z = 0$; $\bar{M}_x = \bar{M}_y = 0$; $\bar{M}_z = \bar{M}_o$

entonces queda; $\sum \bar{F}_x = 0$; $\sum \bar{F}_y = 0$; $\sum \bar{M}_o = 0$; O es un punto cualquiera

Las tres ecuaciones obtenidas pueden resolver un máximo de tres incógnitas.

F. REACCIONES:

Las reacciones pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos de apoyos (puntos de apoyo) o conexiones:

1. *Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida*.

Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos*, *balancines, superficies sin fricción, eslabones o bielas y cables cortos, collarines sobre barras sin fricción y pernos sin fricción en ranuras lisas*.

Estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección.

2 *Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas*.

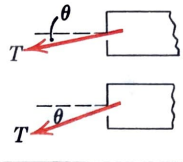
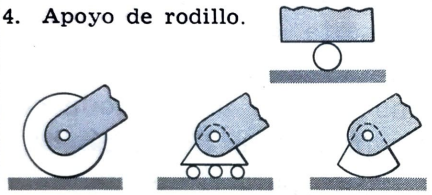
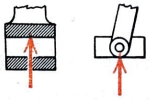
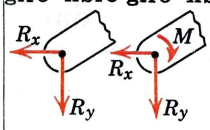
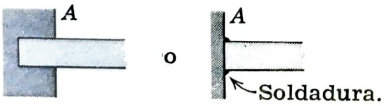
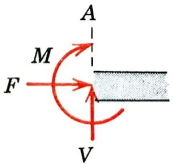
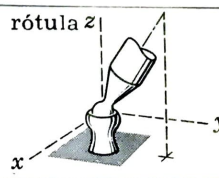
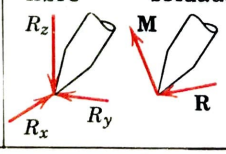
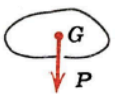
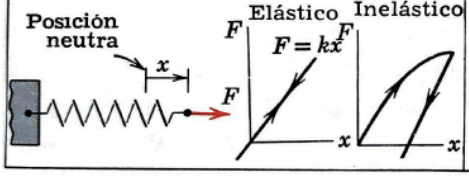
Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *pernos sin fricción en orificios ajustados, articulaciones o bisagras y superficies rugosas*.

Estos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión.

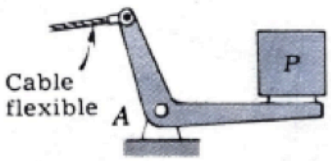
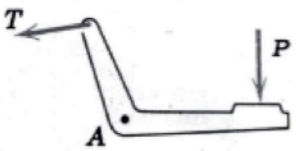
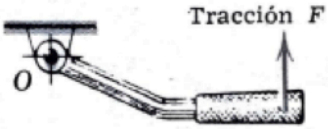
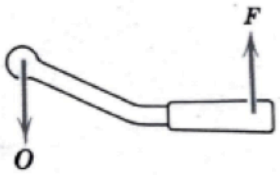
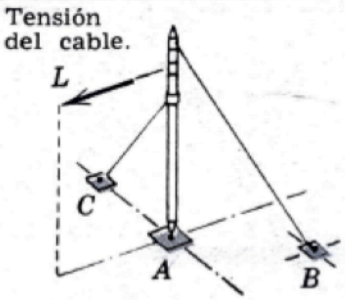
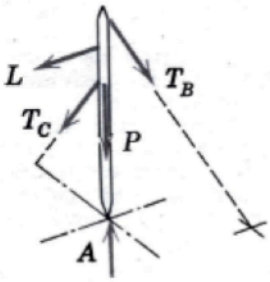
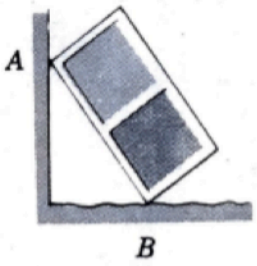
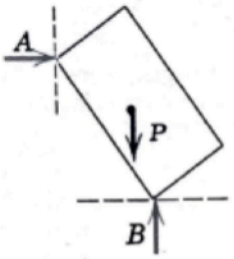
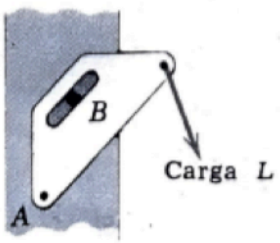
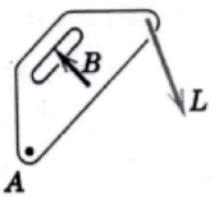
3 *Reacciones equivalentes a una fuerza y un par*.

Estas reacciones se originan por *apoyos fijos*, *empotramientos,* los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y, por tanto, lo restringen por completo.

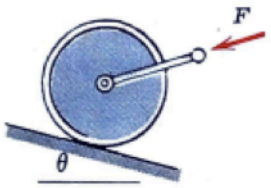
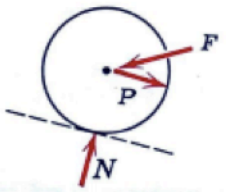
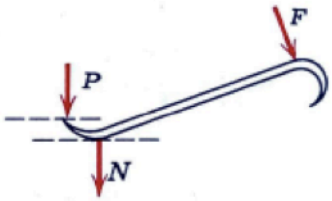
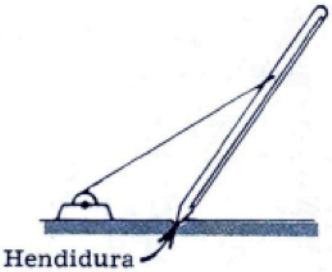
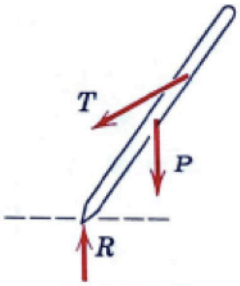
ACCION MECANICA DE LAS FUERZAS

Tipo de contacto y origen de las fuerzas.	Acción sobre el cuerpo que se aísla.	
1. Cable flexible, correa, cadena, o cuerda Peso del cable despreciable Peso del cable no despreciable		La fuerza ejercida por un cable flexible es siempre una tensión dirigida hacia afuera del cuerpo en la dirección del cable.
2. Superficies lisas		La fuerza de contacto es una compresión normal a la superficie.
3. Superficies rugosas		Las superficies rugosas pueden resistir una componente tangencial F (fuerza de rozamiento) de la fuerza de contacto resultante R.
4. Apoyo de rodillo. 		Los apoyos de rodillo, zapata, o bola, transmiten una fuerza compresiva normal a la superficie de apoyo.
5. Guía de deslizamiento libre.		Collar o corredera que puede moverse libremente a lo largo de guías lisas; puede resistir solamente fuerza normal a la guía.
6. Conexión de pasador.	con giro libre sin giro libre 	Una conexión de pasador articulada libremente puede resistir una fuerza de cualquier dirección en el plano normal al eje del pasador. Un pasador que no gire libremente podrá resistir también a un par.
7. Empotramiento o apoyo fijo. 		Un empotramiento o apoyo fijo puede resistir una fuerza axial F, una fuerza transversa V (fuerza cortante), y un par M (momento flector) para impedir la rotación.
8. Articulación de rótula 	libre soldada 	Una articulación de rótula libre resiste fuerzas de cualquier dirección. Una articulación soldada puede también resistir un par.
9. Atracción de la gravedad		La resultante de la atracción de la gravedad sobre todos los elementos de un cuerpo es el peso P y está dirigido hacia el centro de la Tierra pasando por el centro de gravedad G.
10. Acción de un resorte Posición neutra Elástico Inelástico 		La fuerza del resorte es una tensión si está estirado y una compresión si está comprimido. En un resorte elástico linealmente la rigidez k es la fuerza necesaria para deformar el resorte una distancia unidad.

EJERCICIO DE APLICACIÓN: En cada uno de los ejemplos siguientes se presenta en el diagrama de la izquierda el cuerpo que se debe aislar, a la derecha el DCL está incmpleto. Añadir las fuerzas que corresponda. Los pesos de los cuerpos no se tienen en cuenta.

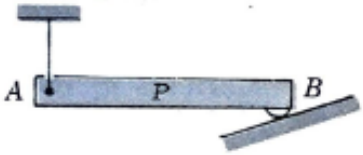
	Cuerpo	*DCL* incompleto
1. Palanca acodada que soporta la carga P.		
2. Palanca de mando que aplica un momento al eje O.		
3. Mástil de peso P cargado soportado por los dos vientos desde el plano horizontal y por una rótula en A.		
4. Placa uniforme de peso P que se apoya contra una pared lisa vertical y sobre un suelo horizontal rugoso.		
5. Soporte cargado fijo mediante una articulación de pasador en A y un pasador fijo B dentro de una ranura lisa.		

EJERCICIO DE APLICACIÓN: En cada uno de los ejemplos se presenta en el diagrama de la izquierda el cuerpo que se debe aislar, a la derecha el DCL es erróneo o incmpleto. Añadir las fuerzas que corresponda o las correcciones. Los pesos de los cuerpos no se tienen en cuenta.

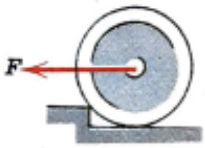
	Cuerpo	*DCL* erróneo o incompleto
1. Apisonador de peso P impulsado hacia arriba de un plano inclinado de ángulo θ.		
2. Palanca que levanta la carga P de superficie horizontal lisa. La barra se apoya sobre una superficie horizontal rugosa.		
3. Poste uniforme de peso P elevado a su posición por el torno. La superficie horizontal de apoyo tiene una hendidura que evita el deslizamiento del poste.		

En cada uno de los ejemplos siguientes dibujar el DCL completo. Rotular las fuerzas. Los pesos de los cuerpos no se tienen en cuenta.

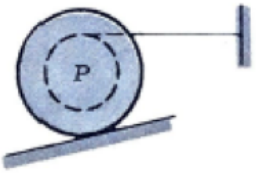
1. Barra horizontal uniforme de peso P suspendida de un cable vertical en A y apoyada en B sobre una superficie inclinada rugosa.



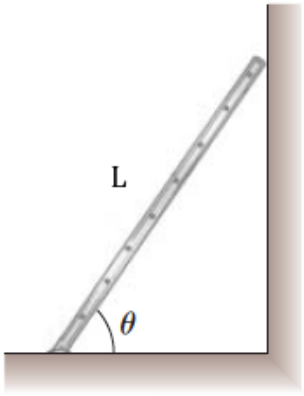
2. Rueda de peso P a punto de rodar sobre el obstáculo a causa de la tracción F.



3. Carrete uniforme de peso P apoyado sobre una superficie rugosa.



EJERCICIO RESUELTO

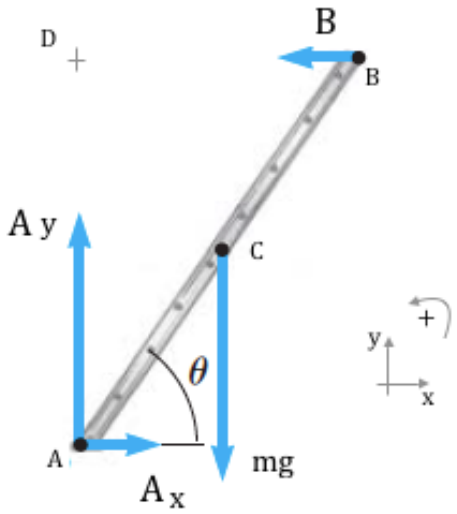


Una escalera uniforme de longitud L descansa contra una pared vertical lisa. La masa de la escalera es m y el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo es μ .

Encontrar una expresión para el ángulo **θ**mín en el que la escalera no se desliza.

el ejercicio requieres ecuaciones en el plano;

$\sum \bar{F}_x = 0$; $\sum \bar{F}_y = 0$; $\sum \bar{M} = 0$



adoptamos ejes *x-y,* además sentido anti horario positivo para los momentos;

el vínculo en B es de tipo 1 (no hay roxamiento) entonces la reacción ($\bar{B}$) de la pared sobre la escalera será perpendicular a la pared;

el vínculo en A es de tipo 2 (hay rozamiento) entonces la reacción de la pared sobre la escalera ($\bar{A}$) será en dirección desconocida y colocamos las componentes.

$\sum \bar{F}_x = 0$

$\bar{A}_x + \bar{B} = 0$

$$A_x - B = 0$$

$\sum \bar{F}_y = 0$

$\bar{A}_y + m\,\bar{g} = 0$

$$A_y - mg = 0$$

$\sum \bar{M}_D = 0$; seleccionamos al punto *D*, para que no intervenga la fuerza B

$\bar{r}_{A/D} \; x \; \bar{A}_x + \bar{r}_{C/D} \; x \; m \; \bar{g} = 0$

$$A_x \; L \; sen\theta \; - \; mg \frac{L}{2} \cos\theta = 0$$

por condición de rozamiento;

$A_x \leq \mu \; A_y$

reemplazando A_x y A_y en esta última,

$tg \; \theta \geq \; {}^{1}/_{2\mu}$

el θ_{min} será;

$$\theta = arctg \left(\frac{1}{2 \; \mu} \right)$$

Observación: el ángulo sólo depende del coeficiente de fricción, no de la masa o longitud de la escalera.